Ex.1 假设A, B 为可逆矩阵, 证明下列矩阵可逆并求出其逆矩阵.

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

证明(1) 因为

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=\!=} - \begin{vmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix} = -|B||A| \neq 0.$$

所以, 矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

可逆.

$$\begin{pmatrix} 0 & A & E & 0 \\ B & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \longleftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & E \\ 0 & A & E & 0 \end{pmatrix} \frac{B^{-1}r_1}{A^{-1}r_2} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & B^{-1} \\ 0 & E & A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

所以,

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 因为

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B| \neq 0.$$

所以, 矩阵

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

可逆.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & E & 0 \\ C & B & 0 & E \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+(-CA^{-1})r_1} \begin{pmatrix} A & 0 & E & 0 \\ 0 & B & -CA^{-1} & E \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[B^{-1}r_2]{A^{-1}r_1} \begin{pmatrix} E & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & E & -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

所以,

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

(3) 类似于(2),

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}.$$